Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro

CÁLCULO II - Agrupamento 3 10 de abril de 2019

1.º Teste de Avaliação Discreta Duração: 2h

Nota: O formulário encontra-se no verso. Justifique sempre as suas respostas.

---

1. **[30]** Determine o raio e o intervalo de convergência da série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n\,2^{n+2}}(x-1)^n$.

2. **[35]** Considere a função dada por $f(x) = x^3 e^{-x^2}$.

   (a) Represente em série de MacLaurin as funções f e f' (indicando os respetivos intervalos de convergência).

   (b) Calcule a soma da série numérica $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n(2n+3)}{n!}$.

3. **[30]** Considere a função *raiz cúbica* $r(x) = \sqrt[3]{x}$.

   (a) Escreva a fórmula de Taylor de segunda ordem da função dada no ponto $c = 1$.

   (b) Mostre que o erro cometido ao aproximar $r(x)$ por $T_1^2 r(x)$ no intervalo $[1, \frac{3}{2}]$ é inferior a $0,01$.

4. **[25]** Considere a função $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x,y) = \dfrac{\sqrt{1-x^2-y^2}}{x-y}$.

   (a) Determine e represente geometricamente o domínio D da função f.

   (b) Identifique a curva de nível *zero* da função f.

5. **[20]** Seja $g(x,y) = x + y - e^{xy}$.

   (a) Justifique que g é diferenciável em $\mathbb{R}^2$ e determine o gradiente de g em $\left(0, \frac{1}{2}\right)$.

   (b) Determine o plano tangente ao gráfico da função g no ponto $\left(0, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$.

6. **[30]** O lucro semanal (em euros) da empresa *MATHisCool* é dado pela função

   $$L(x,y) = -20x^2 - 25y^2 - 20xy + 1000x + 900y - 7000,$$

   onde x e y representam o número de unidades do produto A e o número de unidades do produto B que fabrica, respetivamente.
   Determine quantas unidades de cada produto deve a empresa fabricar para maximizar o seu lucro.
   (Sugestão: determine e classifique o(s) ponto(s) crítico(s) da função L).

(continua)

7. **[30]** Diga, justificando, se são verdadeiras ou falsas as seguintes proposições:

   (a) Se a série de potências $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-1)^n$ tem raio de convergência igual a 2, então a série numérica $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n$ é simplesmente convergente.

   (b) Se uma função $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ é 2π-periódica e integrável em $[-\pi,\pi]$, então a soma da sua série de Fourier coincide sempre com a própria função f.

   (c) O Teorema de Weierstrass garante que a função $h(x,y)=e^{x^2+y^2}$ possui extremos absolutos no conjunto $C=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2<1\}$.

FORMULÁRIO

Algumas fórmulas de derivação

$(k\,f)'=k\,f' \qquad (k\in\mathbb{R})$	$(f^\alpha)'=\alpha\,f^{\alpha-1}f' \qquad (\alpha\in\mathbb{R})$
$(a^f)'=f'\,a^f\,\ln a \qquad (a\in\mathbb{R}^+)$	$(\log_a f)'=\frac{f'}{f\,\ln a} \qquad (a\in\mathbb{R}^+\setminus\{1\})$
$(\operatorname{sen} f)'=f'\,\cos f$	$(\cos f)'=-f'\operatorname{sen} f$
$(\operatorname{tg} f)'=f'\,\sec^2 f=\frac{f'}{\cos^2 f}$	$(\operatorname{cotg} f)'=-f'\operatorname{cosec}^2 f=-\frac{f'}{\operatorname{sen}^2 f}$
$(\operatorname{arcsen} f)'=\frac{f'}{\sqrt{1-f^2}}$	$(\arccos f)'=-\frac{f'}{\sqrt{1-f^2}}$
$(\operatorname{arctg} f)'=\frac{f'}{1+f^2}$	$(\operatorname{arccotg} f)'=-\frac{f'}{1+f^2}$

Alguns desenvolvimentos em série de MacLaurin

- $\displaystyle\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n=1+x+x^2+\cdots+x^n+\cdots, \quad x\in]-1,1[$

- $\displaystyle e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots, \quad x\in\mathbb{R}$

- $\displaystyle\operatorname{sen} x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}=x-\frac{x^3}{3!}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\cdots, \quad x\in\mathbb{R}$

- $\displaystyle\cos x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}=1-\frac{x^2}{2!}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\cdots, \quad x\in\mathbb{R}.$